大数据算法-2025 春

Lecture 17: Compressed Sensing

2025.5.29

Lecturer: 丁虎 *Scribe:* 莫官霖

1 背景与动机

传统信号处理依赖奈奎斯特–香农采样定理，要求采样频率至少为信号带宽的两倍才能无失真重构信号。然而，许多实际信号（如图像、语音、医学成像）在某个变换域中具有稀疏性，仅有少量非零系数。压缩感知（Compressed Sensing, CS）[3, 2] 正是利用这一性质，在采样端直接获取远少于奈奎斯特率的线性测量，实现有效重构。

2 问题定义

设实际信号为 $x \in \mathbb{R}^d$，我们对该信号的测量为 $y \in \mathbb{R}^N$，我们通过一个测量矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{N\times d}$ 来获得 y:

$$y = \Phi x$$

令 Φ 为 Encoder，Δ 为 Decoder，问题的优化目标为：设计合适的 Φ 和 $\Delta, s.t.,$

$$\max_{x\in\mathbb{R}^d} ||\Delta(\Phi x) - x||_2^2$$

最小。

3 稀疏性（Sparsity）

若信号向量 x 中仅有 k 个非零分量（$k \ll d$），则称 x 为 k-稀疏。稀疏度可用 ℓ_0 范数度量：

$$\|x\|_0 = \#\{i : x_i \neq 0\} \leq k.$$

4 限制等距性质（RIP）

测量矩阵 Φ 满足 k-稀疏向量的限制等距性质（Restricted Isometry Property），即存在常数 $\epsilon \in (0,1)$ 使得：

$$(1-\epsilon)\|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1+\epsilon)\|x\|_2^2$$

对所有 $\|x\|_0 \leq k$ 都成立。

5 理论保证

结论：如果 Φ 满足 RIP，则 $\Delta(y)$ 可以通过解

$$\begin{cases} \min ||x||_1 \\ \Phi x = y \end{cases}$$

得到，最终信号重构过程的误差保证为 $||x - \Delta\Phi x||_2 \leq \frac{C\cdot||x||_1}{\sqrt{k}}$.

6 基于生成对抗网络的压缩感知方法

在传统的压缩感知中，我们希望通过一个测量矩阵（编码器）$\Phi \in \mathbb{R}^{N\times d}$，从高维信号 $x \in \mathbb{R}^d$ 中获得低维观测值 $y \in \mathbb{R}^N$，即：

$$y = \Phi x, \quad \text{其中} N \ll d$$

接下来，我们需要设计一个解码器 $\Delta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$，从观测值 y 中恢复出原始信号 x。

传统方法通常假设 x 在某个基下具有稀疏性，但对于图像等自然信号，这种假设并不总是成立。近年来，研究者提出利用预训练的生成模型（如 GAN）来建模信号的先验分布 [1]。

设有一个生成器 $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$，它将低维潜在向量 $z \in \mathbb{R}^m$ 映射为高维信号 $x = G(z)$。假设所有真实信号都可以由某个 z 生成，则恢复问题转化为：

$$\text{寻找} z^* \in \mathbb{R}^m \text{ s.t., } \Phi G(z^*) \approx y$$

因此，解码器 Δ 可以通过以下优化过程定义：

$$\Delta(y) = G(z^*), \quad \text{其中} z^* = \arg\min_z \|\Phi G(z) - y\|_2^2$$

为了进一步增强鲁棒性，有时会加入正则项，防止生成不自然的结果：

$$z^* = \arg\min_z \left(\|\Phi G(z) - y\|_2^2 + \lambda \|z\|_2^2 \right)$$

这种方法利用了生成器的表达能力，将高维信号的先验知识显式地融入重建过程，在观测维度极低的情况下也能生成自然、真实感强的图像。

自从 [1] 首次提出将预训练生成对抗网络（GAN）作为压缩感知的先验，并给出了在非稀疏模型下的重建保证之后，该方向迅速发展起来。Jalal 等人在 2020 年 [4] 引入了鲁棒生成模型压缩感知框架，通过对抗正则化增强了对测量噪声与模型偏差的抵抗能力。更近期，[5] 在 ICML 2022 中提出了生成压缩感知中的不确定性建模方法，利用概率生成先验对重建结果的置信度进行量化，从而进一步提升了系统的可靠性。

References

[1] A. Bora, A. Jalal, E. Price, and A. G. Dimakis. Compressed sensing using generative models. In *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning (ICML)*, volume 70 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 537–546, Sydney, Australia, 2017. PMLR.

[2] E. J. Candes, J. K. Romberg, and T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 59(8):1207–1223, 2006.

[3] E. J. Candes and T. Tao. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(12):5406–5425, 2006.

[4] A. Jalal, L. Liu, A. G. Dimakis, and C. Caramanis. Robust compressed sensing using generative models. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 33. NeurIPS, 2020.

[5] Y. Zhang, M. Xu, X. Mao, and J. Wang. Uncertainty modeling in generative compressed sensing. In *Proceedings of the 39th International Conference on Machine Learning*, volume 162 of *Proceedings of Machine Learning Research*. PMLR, Jul 2022.