最大割问题（Max-Cut）

秦睿哲

一、半正定规划（Semi-Definite Programming）

首先我们考虑线性规划：$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \\ A\mathrm{X} \le 0 \end{cases}$　　$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

如果是凸优化，则需要满足两个条件：①目标函数是下凸函数；②可行域（Feasible Domain）是一个凸区域（Convex Region）

而如果是半正定规划 SDP，对于 $\{x_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\}$

目标是得到 $\min \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_{ij}$　　$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$

限制条件与线性规划略有区别。共同点是均为关于 $\{x_{ij}\}$ 的线性方程组；不同的是这里 X 必须是一个半正定矩阵。这里半正定矩阵 X 可以理解成，在变量空间 R^{n^2} 中，对于 $\forall y \in R^n$，都有 $y^T \mathrm{X} y \ge 0$。当 y 固定的时候，该不等式定义了 R^{n^2} 上的一个经过原点的半空间。y 取不同值的时候，就形成了无穷个经过原点的半空间的交，从而形成了一个空间中的圆锥。

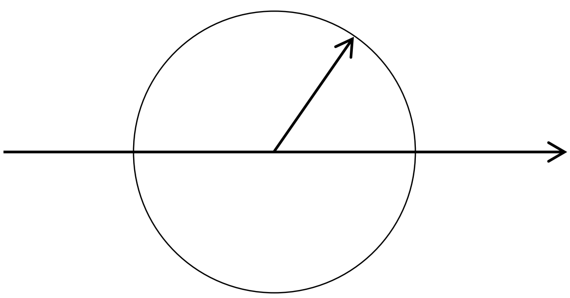
二、最大割（Max-Cut）

输入：$G = (V, E) \rightarrow$无向有权图，$\forall v_i, v_j \in V$，两点边上的权值为 $\omega(e_{ij}) = \omega_{ij} \ge 0$
输出：$S \subseteq V$，$s.t.\ \omega(S, V \setminus S) = \sum_{i \in S, j \notin S} \omega_{ij}$ 最大

问题（A)

定义割向量 $\{y_1, \cdots, y_n\}$，其中 y_i 的取值为 $y_i = \begin{cases} +1 & i \in S \\ -1 & i \in V \setminus S \end{cases}$

则最大割问题的数学模型等价于优化问题 $\max \sum_{i \in S, j \notin S} \omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ij} (1 - y_i y_j)$



$y_i \in \{\pm 1\} \Rightarrow v_i \in S^n$

问题（B）

在单位球面上

$$\begin{cases} \max \frac{1}{2}\sum_{i<j}\omega_{ij}\left(1-\langle v_i, v_j\rangle\right) \\ \forall v_i \in S^n \end{cases}$$

可以想象，问题（B）把定义域从± 1扩大到单位球面上任何一个点都可以，所以问题（A）的解一定是问题（B）的解之一，但是问题（B）的解不能全是问题（A）的解。

令 $x_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$

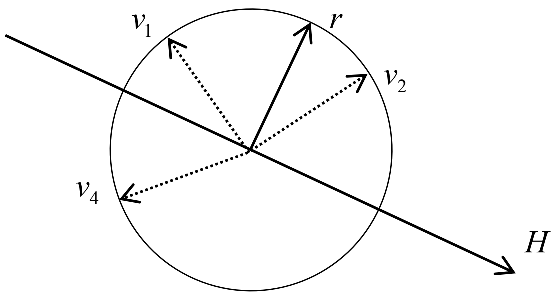
则原问题就变成了$\begin{cases} \max \frac{1}{2}\sum_{i<j}\omega_{ij}\left(1-x_{ij}\right) \\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \text{是半正定的} \\ x_{ii} = 1, x_{ij} = x_{ji} \end{cases}$

$\forall y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, y^T \mathrm{X} y = \left\| y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \right\|^2 \geq 0$，所以 X 一定是半正定的。

三、Max-Cut 算法

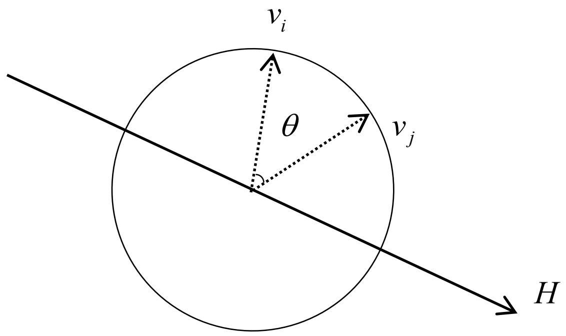
1、将问题（A）转化成问题（B），得到$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq S^n$

2、在 S^n 上随机选取一个向量 r，令 H 为与 r 垂直的超平面。选择 $S:\{i \mid \langle v_i, r\rangle \geq 0\}$以及 $V \setminus S:\{i \mid \langle v_i, r\rangle < 0\}$，则 $S, V \setminus S$ 为最大割的结果。



注意到，此时$\omega(S,V\setminus S)$的期望$E\left[\,\omega(S,V\setminus S)\,\right]=\sum_{i<j}\omega_{ij}\Pr\left[\operatorname{sgn}(\langle v_i,r\rangle)\neq\operatorname{sgn}(\langle v_j,r\rangle)\right]$

这里的sgn函数是符号函数，返回内部参数的正负。



可从图上看到，

$$\Pr\left[\operatorname{sgn}(\langle v_i,r\rangle)\neq\operatorname{sgn}(\langle v_j,r\rangle)\right]$$
$$=\frac{2\arccos(\langle v_i,v_j\rangle)}{2\pi}=\frac{2\theta}{2\pi}$$
$$=\frac{\arccos(\langle v_i,v_j\rangle)}{\pi}$$

$$\Rightarrow E[\omega(S,V\setminus S)]$$
$$=\frac{1}{\pi}\sum_{i<j}\omega_{ij}\arccos(\langle v_i,v_j\rangle)=\Delta$$

再考虑最优值OPT的一个上界U，得到我们结果的近似比$=\frac{\Delta}{\mathrm{OPT}}\geq\frac{\Delta}{U}$（越接近 1，结果越好）。由于问题（B）是由问题（A）放松得到的，即问题（B）比问题（A）的面更加广泛，也就是说问题（B）的最优解一定大于问题（A）的最优解。

问题（B）的目标函数$U=\frac{1}{2}\sum_{i<j}\omega_{ij}\left(1-\langle v_i,v_j\rangle\right)$,

那么就可以推出我们的近似比≥

$$\frac{2}{\pi}\frac{\sum_{i<j}\omega_{ij}\arccos(\langle v_i,v_j\rangle)}{\sum_{i<j}\omega_{ij}\left(1-\langle v_i,v_j\rangle\right)}$$
$$\geq\frac{2}{\pi}\min\frac{\arccos(\langle v_i,v_j\rangle)}{\left(1-\langle v_i,v_j\rangle\right)}$$

考虑函数$f(\theta)=\frac{\theta}{1-\cos\theta}$的极值

$$\geq 0.878$$

即，我们的近似比的期望≥ 0.878

参考文献：

Goemans M X. *Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems using Semidefinite Programming*[J]. Journal of the Acm, 1995, 42(6):1115-1145.